Université Paul Sabatier de Toulouse, année universitaire 2003-2004

CIMP, PHYSIQUE

Corrigé sommaire du problème du contrôle continu EN SECTION B

24 Novembre 2003

B. Problème (15 points)

Pendule élastique vertical amorti par frottement visqueux

1. a) Bilan des forces qui s'exercent sur la masselotte :
Le poids $m\mathbf{g}$, la force de rappel du ressort $-K(x-l_0)\mathbf{e}_x$ et la force de Stokes $-\alpha\mathbf{v}$
b) Une analyse dimensionnelle simple donne :

$$[K] = [F][L]^{-1} = [M][L][T]^{-2}[L]^{-1} = [M][T]^{-2}$$

et

$$[\alpha] = [F][L]^{-1}[T] = [M][L][T]^{-2}[L]^{-1}[T] = [M][T]^{-1}$$

d'où les unités SI respectives : K en N.m^{-1} ou en kg.s^{-2} et α en kg.s^{-1} ou en N.s. m^{-1}.
c) La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - K(x-l_0)\mathbf{e}_x - \alpha\mathbf{v}$$

d) En projection selon l'axe vertical descendant Ox, on obtient :

$$m\ddot{x} = mg - K(x-l_0) - \alpha\dot{x}$$

2. a) À l'équilibre, on trouve :

$$0 = mg - K(l_1 - l_0) \quad \text{d'où} \quad l_1 = l_0 + \frac{mg}{K} = 0,15 + \frac{0,1 \times 9,81}{20} = 0,199\,\text{m} \quad \text{soit} \quad l_1 = 19,9\,\text{cm}$$

b) Introduisons la longueur l_1 dans l'équation différentielle précédente. Il vient, puisque l_1 est une constante :

$$m\ddot{x} = -K(x-l_1) - \alpha\dot{x} \quad \text{soit} \quad \ddot{X} + \frac{\dot{X}}{\tau_e} + \omega_0^2 X = 0$$

en posant :

$$X = x - l_1 \qquad \frac{1}{\tau_e} = \frac{\alpha}{m} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

On déduit de l'analyse dimensionnelle sur l'équation différentielle même :

$$\tau_e (=) [T] \quad \text{et} \quad \omega_0 (=) [T]^{-1}$$

Le premier s'exprime en seconde et le second en radian par seconde.

c) L'influence d'une force constante sur un oscillateur est de modifier uniquement la position d'équilibre. En faisant osciller le même oscillateur horizontalement, on obtiendrait une équation analogue mais avec $X = x - l_0$. Donc X représente toujours l'allongement du ressort par rapport à la position d'équilibre.

3. a) L'expression générale de la solution de l'équation différentielle précédente est la suivante :

$$X(t) = A \exp\left(-\frac{t}{2\tau_e}\right)\cos(\omega_a t + \phi) \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4\omega_0^2\tau_e^2}\right)^{1/2}$$

En effet, la recherche de solutions en $\exp(rt)$ conduit à l'équation caractéristique du deuxième degré suivante :

$$r^2 + \frac{r}{\tau_e} + \omega_0^2 = 0$$

dont la solution est :

$$r = -\frac{1}{2\tau_e} \pm \omega_0 \left(\frac{1}{4\omega_0^2\tau_e^2} - 1\right)^{1/2} = -\frac{1}{2\tau_e} \pm \omega_0 \left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)^{1/2} \quad \text{avec} \quad Q = \omega_0\tau_e$$

Comme le pendule oscille, $Q > 1/2$, d'où :

$$r = -\frac{1}{2\tau_e} \pm j\omega_a \quad \text{avec} \quad \omega_a = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}$$

b) Les conditions initiales permettent de calculer les constantes A et ϕ :

$$X(0) = 0 = A\cos\phi \quad \text{d'où} \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

En outre, comme :

$$\dot{X} = -\frac{A}{2\tau_e}\exp\left(-\frac{t}{2\tau_e}\right)\cos(\omega_a t + \phi) - A\omega_a \exp\left(-\frac{t}{2\tau_e}\right)\sin(\omega_a t + \phi)$$

il vient :

$$\dot{X}(0) = v_0 = -\frac{A}{2\tau_e}\cos\phi - A\omega_a \sin\phi = -A\omega_a \quad \text{d'où} \quad A = -\frac{v_0}{\omega_a}$$

Finalement :

$$X(t) = \frac{v_0}{\omega_a}\exp\left(-\frac{t}{2\tau_e}\right)\sin(\omega_a t)$$

c) Dans l'hypothèse où l'on néglige l'influence du frottement, τ_e est infini, ainsi que Q, d'où :

$$\omega_a = \omega_0 = \left(\frac{K}{m}\right)^{1/2} = 14,14\,\text{rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad X(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

On en déduit la fréquence en Hz : $f = 2,25$ Hz.

d) Le carré de l'amplitude a pour expression :

$$A^2(t) = \left(\frac{v_0}{\omega_a}\right)^2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_e}\right)$$

Cette décroissance exponentielle est bien connue : τ_e est obtenue par l'intersection avec l'axe des temps de la pente à l'origine de la courbe. Comme l'énergie d'un oscillateur est proportionnelle au carré de son amplitude, τ_e représente une durée de relaxation en énergie.

e) Comme $\tau_e = 2,5$ s, le facteur de qualité $Q = \omega_0 \tau_e$ vaut approximativement 35 et $\omega_a \approx \omega_0$. L'amortissement n'a pratiquement aucune influence sur la pulsation. La pseudo-période est donc :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0 = 0,44\,\mathrm{s}$$

f) On a la relation suivante donnant la viscosité :

$$\alpha = 6\pi\eta r = \frac{m}{\tau_e} \quad \text{d'où} \quad \eta = \frac{m}{6\pi r \tau_e} = \frac{0,1}{6\pi \times 0,01 \times 2,5} = 0,21\,\mathrm{Pa.s}$$

car $[\eta] = [M][L]^{-1}[T]^{-1} = [M][L][T]^{-2}[L]^{-2}[T] = [Pa][T]$ puisque $[Pa] = [M][L][T]^{-2}[L]^{-2}$.